# ÉNONCÉ

**1.** $K \subset L$, $\alpha \in L$.

$\alpha$ alg sur $K \Leftrightarrow K[\alpha] = K(\alpha) \Leftrightarrow \dim_K K[\alpha] < +\infty$

**2.** Soit $L/K$ ext. $M = \{x \in L,\ x$ algé sur $K\}$

① $L/M$ extension

② $\forall x \in L$, si $x$ algé sur $M$, $x \in M$

# LEÇONS.

125

127

144

148

# RÉFS.

[P] Perrin · Cours d'algèbre p. 67

# RÉSULTATS ASSOCIÉS

# DÉMO

/// : à l'oral. /// : pour comprendre.

/// écrit au tableau. /// : structure

$L/k$ ext, $\alpha \in L$

**1.** Mq $\alpha$ alg sur $k \Leftrightarrow k[\alpha] = k(\alpha) \Leftrightarrow \dim_k k[\alpha] < +\infty$
a) b) c)

que veut dire être algébrique ?

On considère $\varphi_\alpha : k[T] \longrightarrow k[\alpha]$ et on note $P_\alpha$ le poly min de $\alpha$ qd il existe.

idéal de $k[T]$

. $\ker(\varphi_\alpha) = \begin{cases} \{0\} \to \alpha \text{ transcendant} \\ \text{ou} \\ (P_\alpha) \quad P_\alpha \text{ unitaire} \to \alpha \text{ algébrique} \end{cases}$

<u>a) ⇒ b)</u> Sq $\alpha$ algébrique.

intègre — conserve intégrité

On a : $k[\alpha] \simeq k[T]/(P_\alpha)$ donc $(P_\alpha)$ 1er et $(P_\alpha) \neq \{0\}$

comme ss anneau des corps L

donc $P_\alpha$ 1er
donc $P_\alpha$ irr
donc $(P_\alpha)$ max parmi idéaux princip $k[T]$ (principal.)

donc $k[T]/(P_\alpha)$ corps donc $k[\alpha] = k(\alpha)$

⊂ et $k(\alpha)$ : + petit corps contenant $k$ et $\alpha$

<u>b) ⇒ a)</u> Par contraposée

Sq $\alpha$ transcendant.

$k(\alpha) = \left\{ \frac{P(\alpha)}{G(\alpha)},\ P, G \in k[X],\ G(\alpha) \neq 0 \right\}$

$= \left\{ \frac{P(\alpha)}{G(\alpha)},\ P \in k[X],\ G \in k[X]\setminus\{0\} \right\}$ car pas de poly annul $\alpha$.

$\simeq k(T)$ (éval)

Et $k[\alpha] \simeq k[T]$ ($\varphi_\alpha$ injectif car $\alpha$ transc)

Or, $\underbrace{k[T]}_{\text{pas un corps}} \not\simeq \overbrace{k(T)}^{\text{corps}}$

Donc $k(\alpha) \neq k[\alpha]$

<u>a) ⇒ c)</u> Notons $d = \deg(P)$

Soit $S \in k[X]$

Par div eucli, $\exists\, Q, R \in k[X]$, $\deg(R) < \deg(P_\alpha) := d_\alpha$ $\quad Q(\alpha) = P(\alpha)S(\alpha) + R(\alpha) = R(\alpha)$.

Donc $k[\alpha]$ est engendré par $(1, \alpha, \dots \alpha^{d_\alpha - 1})$

La fam est libre par minimalité de $d_\alpha$

si $\exists \lambda_1 \dots \lambda_n$, $\sum^{d-1} \lambda_i \alpha^i = 0$, $\exists$ poly annul de $\alpha$ deg < deg P)

Donc c'est une base et $[k(\alpha):k] = d_\alpha$.

<u>c) ⇒ a)</u> : Par contraposée.

Sq $\alpha$ transcendant. $k[\alpha] \simeq \underbrace{k[T]}_{\text{dim } \infty \text{ sur } k}$ donc $[k[\alpha]:k] = +\infty$

$L/k$ extension

$M = \{x \in L,\ x$ algébrique sur $k\}$ = fermeture alg de $k$ dans $L$.

$k - M - L$.

## 2. PLAN :

① $M$ ss corps de $L$ contenant $k$.

② $\forall x \in L$, si $x$ algé sur $M$, $x \in M$

↳ ie : $M$ est algébriquement fermé dans $L$

① $k \subset M$ car $\forall x \in k$, $X - x \in k[X]$ annule $x$.

Soit $x, y \in M \setminus \{0\}$ :

$-x \in M$ : annulé par $P_x(-X) \in k[X]$.

$x^{-1} \in M$ : annulé par $R(X) = \underbrace{X^d}_{\text{pR avoir poly}} P_x\left(\frac{1}{X}\right) \in k[X]$ → c'est le poly réciproque : on a inversé l'ordre des coeffs.

+ difficile : le produit et la somme !

En pratique pas évident de trouver poly annul.

On va donc use caract élem alg.

On va travailler avec ext + facile contenant $xy$ et $x+y$.

$k[xy]$ \
$k[x+y]$ / $k[x,y] = k[x][y]$ → mq $k[x,y]$ de deg fini sur $k$

Mq $[k[x,y] : k] < +\infty$ :

$x$ algé donc $k[x] = k(x)$

$y$ algé sur $k$ donc sur $k(x)$ on peut voir poly annul ds $k(x)[y]$

Donc $k[x,y] = k(x)[y] = k(x,y)$ est un sous corps de $M$.

Par mul deg : $[k[x,y] : k] = \underbrace{[k(y)(x) : k(x)]}_{<+\infty \text{ car } y \text{ algé}} \underbrace{[k(x) : k]}_{<+\infty \text{ car } x \text{ algé}} < +\infty$

Donc $k[xy]$ et $k[x+y]$ aussi

Donc $xy$, $x+y \in M$.

Donc $M$ est un sous corps de $L$.

② Soit $x \in L$ algébrique sur $M$ BUT : $x \in M$ ie alg sur $k$.

<u>BUT</u> : $[k(x):k] < +\infty$ ( par ①c ).

$\exists P = \sum_{i=0}^{d} \underbrace{a_i}_{\in M} X^i \in M[X]$, $P(x) = 0$.

$x$ algé sur $k_d = k[a_0, .. a_d]$.

$$\begin{tikzcd}
 & k[x] \arrow[dr, dash] & \\
k \arrow[ur, dash, "?"] \arrow[dr, dash] & & k_d[x] \\
 & k_d \arrow[ur, dash, "<+\infty"'] &
\end{tikzcd}$$

si fini, aussi.

$\mathcal{H}(i)$ : " $[\overbrace{k[a_0, .. a_i]}^{k_i} : k] < +\infty$. " $i \in [\![0,d]\!]$.

Récu finie.

Ⓘ : $i = 0$ : $a_0$ alg sur $k$ donc $[k(a_0):k] < +\infty$.

Ⓗ sq $\mathcal{H}(i)$ vraie, $1 \leq i \leq d-1$.

$k_{i+1} = k[a_0, .. a_i, a_{i+1}] = k_i[a_{i+1}]$

$[k_{i+1}:k] = \underbrace{[k_{i+1}:k_i]}_{<+\infty \text{ car } a_{i+1} \in M} \underbrace{[k_i:k]}_{<+\infty \text{ par HR}} < +\infty$.

Donc $\mathcal{H}(i+1)$ vraie.

dire "par récu" si manque de temps, sauf le cas 148

Par principe de récu, $[k_d:k] < +\infty$.

Donc par mul deg, $[k(x):k] < +\infty$.

Par mul des deg $[k_d[x]:k] = \overbrace{[k_d[x]:k_d]}^{<+\infty \ x \text{ alg } k_d} \overbrace{[k_d:k]}^{\text{par ce qui préc.}} < +\infty$

$\underbrace{[k_d[x]:k]}_{<+\infty} = [k_d[x]:k[x]] [k[x]:k]$

Donc $[k[x]:k] < +\infty$ et $x \in \Omega$.